

2.28 鉄心を有するコイルの等価 インピーダンスの計算法 (I)

高 木 亀 一

On the Equivalent Impedance Calculation of Iron Cored Coil. (I)

Kamecihi TAKAKI

From old days, Iron Cored Coil Problems have been treated by many researchmen. But, up to the present, no men treated the iron losses dynamically, and considered Hysteresis, Eddy Current and Non-linearity simultaneously.

The author derive the Pure Magnetizing Curve from Normal Magnetizing Curve, indicate the Eddy Current Effect as equivalent second circuit of transformer, decide Hysteresis Current loci and Eddy Current loci, and seek the Current loci against Magnetic flux and Magnetizing Current as frequency is constant.

By these loci, the author calculate equivalent impedance of Iron Cored Coil as Constant Current Circuits, Constant Voltage Circuits and Constant Magnetic Flux Circuits.

1 結 論

鉄心を有するコイルを交流回路に使用する場合起り得る回路としては

- I 定電流回路
- II 定電圧回路
- III 定磁束回路

の3種が考えられる。この中通信方面では主としてIか或いはII、電刀方面では主としてIIの場合となる。IIIは実際の回路としては出て来ないのであるが、従来のこの種の回路の取扱いはIIIだけで、IIIの方式をそのままI又はIIと混同して扱っている。然し之等3種は当然区別されるべきで、特に鉄心の非直線性を考える時は、之等を混同して解析すれば、非常に誤った結果を招来する。

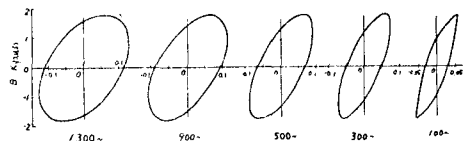
扱て既に筆者が発表したように²⁾之等の回路の基本になるのは

1. ヒステリシス損
2. 渦流損
3. 鉄心の非直線性

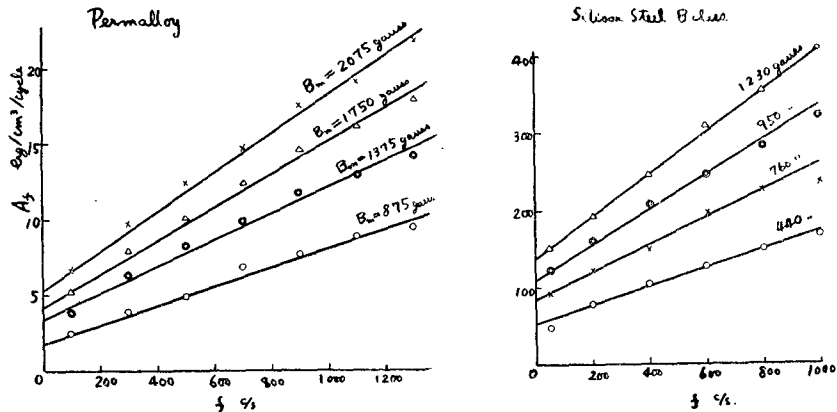
で、1, 2, 3 を総合して取扱うには数式解析では相当複雑となるので本論文では簡単に求まる図式解法を報告する。

2 鐵 損

鉄心の損失としてはヒステリシス損、渦流損及び磁気効余による残留損失があるが、この中残留損失は物理的にも未だ不明であるし、事実考えたくとも結果には殆んど影響がないようである。扱て磁束を一定として周波数を変化して見ると第1図となる。今第1図のヒステリシス動曲線の面積を測つて横軸に周波数 f 、縦軸に面積 A_f をとると第2図に示す如く周波数の低い範囲では直線となる。この事は表皮作用を考えなく



第1図 パーマロイの動的ヒステリシス曲線

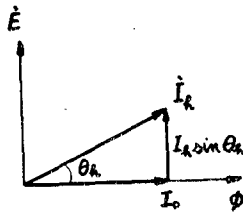


第2図 動的ヒステリシス曲線の面積と周波数との関係

てよい範囲ではコイルを流れる励磁電流はヒステリシス電流に渦流損失分電流を加えればよい事、及びヒステリシス固有の電流は周波数に無関係で一定であつて、渦流損失分電流は周波数に比例して位相は電圧と同相従つて磁束より 90° 進んでいる事が分る。

3 ヒステリシス

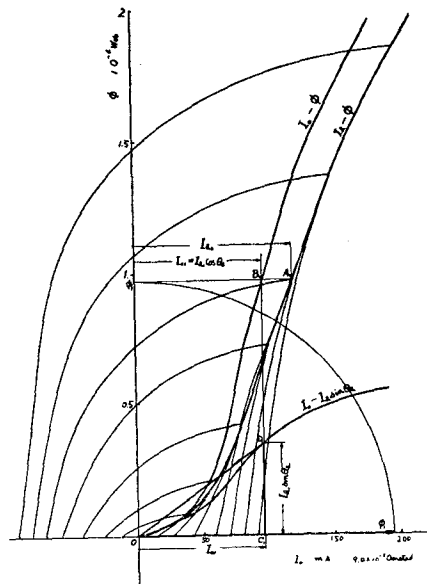
前述の事によつて周波数が変化してもヒステリシス固有の環線は静磁化曲線と一致する事が分るが、交流回路に使用した時はその環線の面積に比例する損失分が発生するわけであるから、実際のヒステリシス電流は磁束と同相ではなく第3図に示すように電圧より 90° より少く遅れ、従つて磁束よりは θ_h だけ進む事が判明する。



第3図 ヒステリシス電流のベクトル図

第4図はB級硅素鋼板についての色々の ϕ_m の値に対する静磁化曲線 (Static loop) 及び $I_h - \phi$ は各 loop の尖端を結んだ正規磁化曲線 (Normal magnetizing curve 又は Virgin curve) を示しているのであるがこの図に於ける ϕ と I_h とは第3図の事由により同相でない事が分る。

最大磁束 ϕ_m 、この時の最大磁化電流 I_m に対する静磁化曲線の面積を A_s とすると、ヒステリシス尖端による高調波を無視して、等価正弦波を考えると、この時の磁束 ϕ より I_h の進みの角 θ_h は既に発表せるように、⁽²⁾


 第4図 正規磁化曲線と無損失曲線及びヒステリシス損失電流の関係 (資料, B級硅素鋼板, 断面積; 1.57cm^2 , 磁路長; 26.7cm , 巻回数 200T の環状鉄心)

$$\theta_h = \sin^{-1} \frac{A_s}{\pi \phi_m I_m} \quad (1)$$

となる。

扱て第3図で I_h の中 ϕ と同相分 $I_h \cos \theta_h = I_0$ と 90° 位相差をもつ $I_h \sin \theta_h$ とに分けて見ると、 I_0 は ϕ を作るための純磁化電流で $I_h \sin \theta_h$ はヒステリシス損失分電流となる。

第4図で磁束 ϕ_1 に対するヒステリシス電流を I_h と

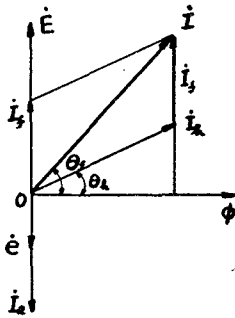
すると、 $I_h - \phi$ 曲線 (Normal curve) 上の A 点が求まるが、 ϕ_1 を一定として横軸を I_h の代りに $I_{01} = I_{h1} \cos \theta_{h1}$ にとると B_1 点が求まる。各々の loop について B 点を求めると $I_0 - \phi$ 曲線となる。 $I_0 - \phi$ 曲線上では I_0 と ϕ とは常に同相であるから、この曲線を無損失磁化曲線又は純磁化電流と云う事が出来る。

次に I_0 を横軸にして縦軸に $I_h \sin \theta_h$ をとる、例えば ϕ_1 に対しては I_0 は I_{01} となり $\overline{C_1 D_1} = I_{h1} \sin \theta_{h1}$ とすると $I_0 - I_h \sin \theta_h$ 曲線が得られる。

故に ϕ_1 を 90° 回転して横軸とすると OC_1 は ϕ_1 と同相、 $C_1 D_1$ は ϕ_1 より 90° 位相が進むので、 OD_1 は $\vec{O\phi_1}$ を基準ベクトルとするヒステリシス電流のベクトルとなる。従つて又、 $I_0 - I_h \sin \theta_h$ 曲線は ϕ を変化した時のヒステリシス電流のベクトル軌跡である事が分る。

4 渦 流

次に渦流の影響について考察する。表皮作用を考慮なくともよい程の周波数では第5図に示すベクトル図のように、鉄心内を磁束 ϕ が通ると鉄心も導体であるから ϕ より 90° 位相の遅れた誘導起電力 e が発生する。鉄心を二次の等価回路と考へた場合周波数の低い場合は抵抗が大部分であるから e と同相の渦流 I_e が鉄心内を流れる。 I_e によつて之と同相な磁束が出て合成の磁束は ϕ とは異つて来る



第5図 渦流の影響とそのベクトル図

のであるが、 ϕ を一定に保つには、一次側従つてコイルに I_e による起磁力と方向反対で大きさ等しい起磁力を加えればよい。即ちコイルには I_e の $A \cdot T$ を打ち消すために I_f を流せばよい。

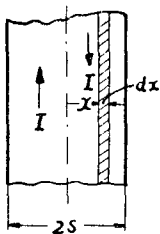
扱へ e は ϕ と ω に比例し、 I_e, I_f は夫々 e に比例するので I_f は

$$I_f = K \omega \phi \quad (2)$$

で表わされ、 K は鉄心に関して常数となる。

K の値は鉄心の厚さ $2s$ 、断面積 A 、磁路長 l 、固有抵抗 ρ が判明している時は次のようにして理論的に求まる。

普通鉄心では厚さは巾に比して極めて小さいので鉄心内に流れる



第6図 鉄心の断面

電流は表面に第6図に示すように平行に流れるので鉄心一枚で単位長さ、単位の巾の鉄心内に生ずる渦流による $A \cdot T$ (AT)_{s1} は

$$(AT)_{s1} = \frac{s \cdot 1}{A} \cdot \frac{1}{2} I = -j \frac{s^2}{2A} \frac{\omega B}{\rho/s}$$

古積率を σ とすると、単位体積中の渦流によつて生ずる (AT)₁ は

$$(AT)_1 = -j \frac{s^3 \omega B}{2A\rho} \frac{\sigma}{2s} = -j \frac{\omega B s^2 \sigma}{4A\rho}$$

故に全体の鉄心内に生ずる (AT)_e は

$$(AT)_e = (AT)_1 \cdot Al = -j \frac{\omega B A s^2 \sigma l}{4A\rho}$$

コイルの巻回数を n とすると

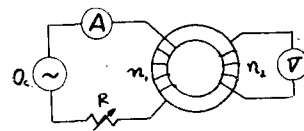
$$I_f = -\frac{1}{n} \cdot (-j K \omega \phi) = j \omega \phi \frac{s^2 \sigma l}{4A\rho} \quad (3)$$

(2) と (3) を比較して

$$K = \frac{s^2 \sigma l}{4A\rho} \quad (4)$$

上式によつて K の値が計算される。

実際の問題の時は固有抵抗その他の不明な事も往々ある。かかる場合には次のように実験的に K の値を求める事が出来る。

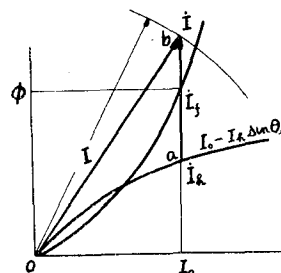


第7図 実験的に(2)式の K を求める方法の結線図

第7図の結線で発振器 Q_s の発振周波数を f [c/s]、高周波電流計 A の読みを I [A]、真空管電圧計 V の読みを V [V] とすると、鉄心を通る磁束数 ϕ は

$$\phi = \frac{V}{2\pi f \cdot n_2} [\text{Web}] \quad (5)$$

となるので、第8図に示すように ϕ が定まると $\phi - I_0$



第8図 実験的に(2)式の K の求める方法の説明図

曲線より I_0 が求まり、 $I_0 - I_h \sin \theta_h$ 曲線は ϕ に相当するヒステリシス電流 I_h が求まる。第5図と比較して分るように I_f は ϕ より 90° 進んでいるので第8図の $\overline{I_0 I_h}$ を延長して、 O を中心として I の長さで円弧を描いて

$\overline{I_0 I_h}$ の延長線との交点を I とすると、 I は ϕ , f の時のコイルを流れる電流になり、従つて線分 \overline{ab} がベクトル I_f に相当するので (2), (5) より

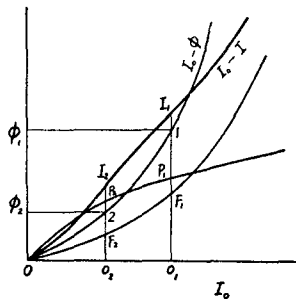
$$K = \frac{\overline{ab}}{2\pi f \cdot \phi} = n_2 \overline{ab} \quad (6)$$

として実験的に求めることが出来る。

5 電流のベクトル軌跡

渦流の影響を計算するための係数 K を (4), (6) 式で決定されると、周波数を一定とした時の磁束可変に対する電流のベクトル軌跡が次のようにして求めることが出来る。

第 9 図に示す $I_0 - I_h \sin \theta_h$ 曲線は既に述べたように磁束を基準ベクトルとした時のヒステリシス電流のベクトル軌跡である。2 で述べた事を考え合わせるとこのヒステリシス電流のベクトル軌跡は換言すると 0 からの時の交流の電流のベクトル軌跡であることが分る。



第 9 図 周波数一定の場合の電流のベクトル軌跡

扱て (4), (6) によつて第 5 図に示す I_f は ϕ のベクトルに直角で長さは ϕ と f に比例する。従つて f を一定とすると $K\omega$ が一定となるので

$$I_f = K\omega\phi = K'\phi \quad (7)$$

となり、 ϕ を基準ベクトルとした時の I_f は ϕ に比例する。即ち第 9 図の ϕ_1 に対しては $I_0 - \phi$ 曲線上の点 1 によつて O_1 が定まり、 ϕ_1 に対する I_0 の大きさは $\overline{OO_1}$ となるので、 $I_f = K'\phi$ によつて計算された値を $O_1 F_1$ にとり、全く同様にして ϕ_2 に対する I_f を計算して $O_2 F_2$ の長さに等しくとり、之等の諸点 F_1, F_2, \dots を結ぶと I_f のベクトル軌跡 $I_0 - I_f$ 曲線が求まる。

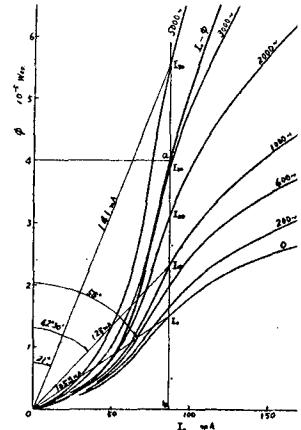
次に第 5 図について説明したように I_f は I_h の $I_h \sin \theta_h$ 成分の延長線上にあるので第 9 図で ϕ_1 に対する $I_0 - I_h \sin \theta_h$ 曲線上の点を P_1 とすると $\overline{OP_1}$ 直線上で $\overline{P_1 I_1} = \overline{O_1 F_1}$ となる点 I_1 を求めると I_1 即ち $\overline{OI_1}$ は ϕ_1 を 90° 時計式に回転して基準ベクトルとした時の周波数 f c/s に対する電流のベクトルとなる。 ϕ_2 に対しても全く同様な操作で I_2 が求まり、以下同様にして ϕ の直に対して I を求めて曲線を描くと第 9 図の $I_0 - I$ 曲線となる。以上によつて分るように $I_0 - I$ 曲線は磁束

ϕ を可変とした時の周波数 f に対する電流のベクトル軌跡であることが分る。

6 定磁束回路

順序として先づ定磁束回路について説明する。

第 10 図は外径 99.5mm、内径 70.5mm、一枚の厚さ 0.35mm の環状の B 級硅素鋼板を 30 枚重ねて、200 回のコイルを巻いた時の $I_0 - \phi$ 及び前節で説明した方法で求めた $I_0 - I$ 曲線を示すと第 10 図となる。



第 10 図 定磁束回路の等価インピーダンス計算図

第 10 図で仮に 4×10^{-5} Web の磁束を通すための電流を求めて見ると $4a$ を横軸に平行に引き $I_0 - \phi$ 曲線との交点を a とする。 a から縦軸に平行に \overline{ab} 直線を引き $I_0 - I$ 曲線との交点を $I_0, I_2, I_{10}, I_{20}, I_{50}$ 等とすると、磁束を基準ベクトルとした時の 0, 200, 1000, 2000, 5000 の時の 4×10^{-5} Web を通すに要する電流のベクトルは夫々、 $\overline{OI_0}, \overline{OI_2}, \overline{OI_{10}}, \overline{OI_{20}}, \overline{OI_{50}}$ で示される。

従つて之等に対する等価インピーダンスを計算すると次のようになる。

磁束 $\phi = 4 \times 10^{-5}$ Web であるから

1000 回の時の電圧は

$$E_m = \omega n \phi = 2000\pi \times 200 \times 4 \times 10^{-5} = 50 \text{ [V]}$$

この時流れる電流は第 10 図の $\overline{OI_{10}}$ の長さを測ると $I_m = 128 \text{ mA}$ で電圧との位相角 $\theta = 42^\circ 30'$ となる。

従つて $\overline{OI_{10}}$ を基準ベクトルとすると

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = \frac{50 \angle 42^\circ 30'}{128 \times 10^{-3}} = 390 \cos 42^\circ 30' \\ &\quad + j 390 \sin 42^\circ 30' = 288 + j 263 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

同様にして 5000 回の時は

$$E_m = \omega n \phi = 10000\pi \times 200 \times 4 \times 10^{-5} = 250 \text{ [V]}$$

$I_m = 141 \quad \theta = 21^\circ$

故に等価インピーダンスは

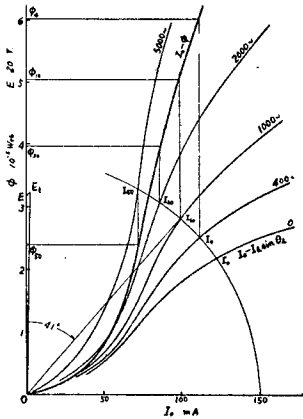
$$\dot{Z} = \frac{250 \angle 21^\circ}{141 \times 10^{-3}} = 1650 + j 652 \text{ [\Omega]}$$

以上のように $\phi - I_0$ 及び $I - I_0$ 曲線が求まると任意の磁束、任意の周波数の時の磁化電流及びその時の等

価インピーダンスは容易に計算される。

7 定電流回路

定電流回路に対しても前に求めた $I_0-\phi$ 及び I_0-I 曲線をもとにして次のように計算される。



第11図 定電流回路の等価インピーダンス計算図

例えば $I_m=150$ [mA] と仮定すると第11図で O を中心として 150 [mA] の長さで円弧を描いて $400\sim$, $1000\sim$, $2000\sim$, $5000\sim$ の電流曲線との交点を夫々 I_4 , I_{10} , I_{20} , I_{50} とすると磁束を基準ベクトルとした時の各周波数の電流は夫々 OI_4 , OI_{10} , OI_{20} , OI_{50} で示される。又之等各周波数に対する磁束は夫々 I_4 , I_{10} , I_{20} , I_{50} より縦軸に平行に直線を引き $I_0-\phi$ 曲線との交点を求め、この交点の縦軸の長さを夫々 ϕ_4 , ϕ_{10} , ϕ_{20} , ϕ_{50} とすると、之等は $I_m=150$ [mA] に対する $400\sim$, $1000\sim$, $2000\sim$, $5000\sim$ の時の所要磁束の大きさである。

従つて之等に対する等価インピーダンスは次のようにすれば計算出来る。

例えば $f=1000\sim$ の時の ϕ の値は 5.05×10^{-5} [Web] であるからコイルの両端にかかる電圧 $E = \omega n \phi = 2000\pi \times 200 \times 5.05 \times 10^{-5} = 63.5$ [V] となり、
 $OI_{10}=150$ [mA] で、電圧と電流との間の位相角 θ は第11図より $\theta=41^\circ$ が求まるから、等価インピーダンス Z は

$$Z = \frac{63.5 \angle 41^\circ}{150 \times 10^{-3}} = 320 + j277$$

となる。

実際問題としてはコイルの巻線抵抗は無視出来ない事が多い。この場合はこの直線抵抗を R_0 とするとコイルの内部には ϕ によつて生ずる電圧の外に R_0 の電

圧降下があるから、コイルの両端の電圧は両者のベクトル和となる。而して R_0 の電圧降下は I と同様であるから R_0 を考慮に入れた時は次のようにすればよい。

例えば $I_m=150$ [mA] で $1000\sim$ の時の磁束 ϕ は第11図から前述のように $\phi=5.05 \times 10^{-5}$ [Web] となり、誘導起電力 $E = \omega n \phi = 63.5$ [V] となる。この E は基準ベクトル ϕ より 90° 進んでいるから縦軸上に 63.5 [V] を OE として表わされる。 $R_0=10$ [Ω] とすると

$$IR_0 = 150 \times 10 \times 10^{-3} = 1.5$$

となるので E より OI_{10} に平行に EE_t 直線を引き $EE_t=1.5$ [V] になる点 E_t を求めると OE_t は磁束 ϕ を基準にした時のコイルの端子電圧になる。

$$OE_t = 64.5$$

$$\theta = 39^\circ 40'$$

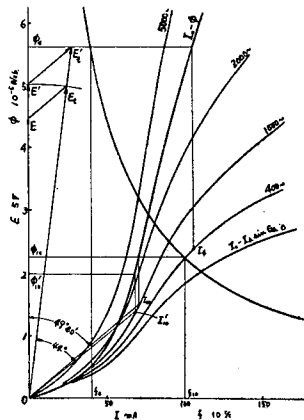
$$Z = \frac{64.5 \angle 39^\circ 40'}{150 \times 10^{-3}} = 330 + j275$$

となる。

8 定電圧回路

電圧一定の場合、コイル直線抵抗の小さい時は $E = \omega n \phi = \text{const.}$ であるから一定電圧 E に対する磁束 ϕ と周波数 f とは反比例するので

$$\text{例えば } E=20$$



第12図 定電圧回路の等価インピーダンス計算図

とした時の $\phi-f$ 曲線を描くと第12図の $\phi-f$ 曲線となる。

故に $f=1000\sim$, $f=400\sim$ に対する f の点 f_{10} , f_4 よりこの時の ϕ の値 ϕ_{10} , ϕ_4 は第12図より $\phi_{10}=5.6 \times 10^{-5}$ [Web], $\phi_4=2.25 \times 10^{-5}$ [Web] が求まるのでこの ϕ_{10} , ϕ_4 に対する電流は I_{10} , I_4 が図示された点で求まる。

故に等価インピーダンスは次のようにして計算される。

$$f=1000 \quad E=20 \quad \text{に対する} \quad I_{10}=92 \text{ [mA]}$$

$\theta=49^\circ 40'$ が第 12 図より求まるので

$$\dot{Z} = \frac{20 \angle 49^\circ 40'}{92 \times 10^{-3}} = 140 + j166$$

として計算される。

直流抵抗 R_0 が無視出来ない時は次のようにすればよい。

例えば上の例で $R_0=56.5 \text{ } [\Omega]$ とすると

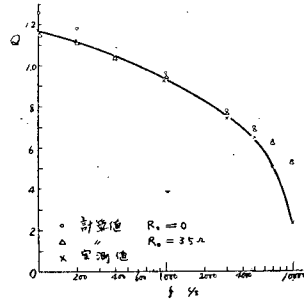
$$IR_0 = \frac{92 \times 56.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} = 2.78 \text{ [V]}$$

となるので、この $\dot{I}R_0$ ベクトルを \dot{I} と平行に $E'=20 \text{ [V]}$ の点から引くと誘導起電力 20 [V] に対するコイル端子電圧は E_t' が求まるが、 $E_t=5 \text{ [V]}$ するには O を中心として $\overline{OE'}=5 \text{ [V]}$ の長さで円弧を描き $\overline{OE_t'}$ との交点を E_t とすると、この E_t より $\overline{E'E_t'}$ に平行に $\overline{E_tE}$ を引き継軸との交点を E とすると、この E は所要の誘導起電力となる。図より $E=4.45 \text{ [V]}$ となるので $\phi=2.25 \times 10^{-5} \text{ [Web]}$ より減少して $\phi'=2.25 \times \frac{17.8}{20} \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-5} \text{ [Web]}$ となる。 $\phi=2 \times 10^{-5} \text{ [Web]}$ に対する $1000 \sim$ の電流を求めると $I_{10}'=87.3 \text{ [V]}$ となり $\angle E_tOI_{10}'=44^\circ$ が求まるので

$$\dot{Z} = \frac{20\sqrt{2} \angle 44^\circ}{87.3 \times 10^{-3}} = 233 + j226$$

9 結 論

第 13 図は第 11 図に示す定電流 $I=80 \text{ [mA]}$ についての $Q=\omega L/R$ の本論による計算値と実験値との比較を示す。図を見れば分るように周波数の低い場合 ($x=d\sqrt{\pi f \nu \mu}$ 但し d : 鉄板の厚さ, f : 使用周波数, ν : 鉄心の導電率, μ : 鉄心の導磁率として, x の値が 1 以下の場合⁵⁾) は表皮作用の影響は全く考えなくてよい本論の計算方法は正確であるが、周波数が $3000 \sim$ 以上になると計算値と実測値とは相当違ってくる。之は上述の x の値が 2 以上になる場合で明らかに表皮作用の影響であることが分る。



第 13 図 計算値と実測値との比較

従つて表皮作用の少い鉄心、即ち薄いか、固有抵抗大きい場合やダストコアの場合は本論の計算方法は相当有効である。

表皮作用の影響を考えたこの種の計算方法については後日詳しく報告する予定である⁵⁾。

以上古くからの問題である鉄心の問題も従来の此の種の取り扱いには非直線性を全然考えなかつたり、鉄損を唯機械的に付け加えた方法、単的に言えば静特性をそのままで動特性とした方法であつたが、本論によつて非直線性と鉄損その他を有機的に、換言すれば静的な方法から動的な方法に前進させた事において意義があり、又本方法によつて広範囲に亘つて正確な等価インピーダンスが容易に計算されるようになったものと思います。

尙本研究に対して、現場技術者として御助言頂き鉄心資料の便宜をも与えられた国際電信電話の桑原氏と、図面調整その他で助力された本学助手石崎弘君に対して深甚の謝意を表します。

文 献

- 1) 例えば Legg, V. E., B. S. T. J., 16 39
- 2) 高木: 昭和 28 年電気連大論文集 No. 6 (1953—5)
- 3) 高木: 電学誌 74 (1954—6)
- 4) 高木: 明大研報 III 49 (1952)
- 5) 高木: 昭和 29 年電気連大論文集 No. 35 (1954—5)